高 2023 级第二次模拟考试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．A　2．B　3．B　4．C　5．D　6．C　7．D　8．A

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9．BC　10．ACD　11．ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. $\sqrt{2}$　13. $a_n=1$　14. $[\frac{1}{2},1]$（2 分）；$[1-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$（3 分）

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15.解：（1）因为 $2a\cos A+b\cos C=c\cos(A+C)$,

所以 $2a\cos A+b\cos C=-c\cos B$ ……2 分

由正弦定理得 $2\sin A\cos A+\sin B\cos C=-\sin C\cos B$ ……3 分

所以 $2\sin A\cos A=-\sin C\cos B-\sin B\cos C=-\sin(B+C)=-\sin A$ ……4 分

又 $\sin A\neq0$,所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$ ……5 分

又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{2\pi}{3}$ ……6 分

（2）因为△ABC 的面积为$\sqrt{3}$

所以 $S=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$,解得 $bc=4$ ……8 分

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle BAC=b^2+c^2+bc=(b+c)^2-bc$,

即$(\sqrt{21})^2=(b+c)^2-4$ ……11 分

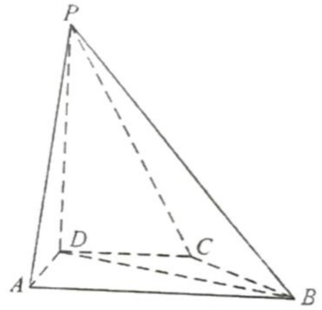
解得 $b+c=5$ ……12 分

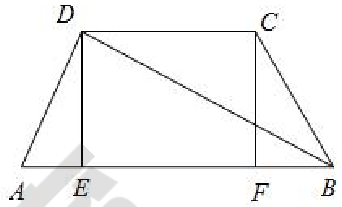
所以△ABC 的周长为 $a+b+c=5+\sqrt{21}$ ……13 分

16.解：（1）证明：在四边形$ABCD$中，作$DE\perp AB$于E，$CF\perp AB$于F ……1 分

因为$CD//AB, AD=CD=CB=1, AB=2$，

所以四边形$ABCD$为等腰梯形 ……2 分





所以 $AE = BF = \frac{1}{2}$，

故 $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$BD = \sqrt{DE^2 + BE^2} = \sqrt{3}$ ………………3 分

所以$AD^2 + BD^2 = AB^2$，所以$AD \perp BD$ ………………4 分

因为$PD \perp$平面$ABCD$，$BD \subset$平面$ABCD$，

所以$PD \perp BD$，

又$PD \cap AD = D$，

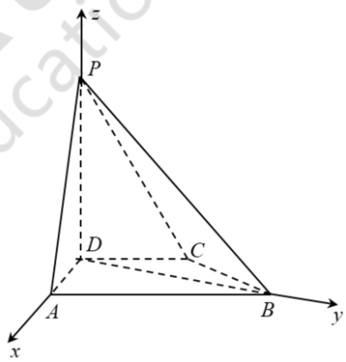
所以$BD \perp$平面PAD ……………………………………6 分

又因$PA \subset$平面PAD，所以$BD \perp PA$ ………………7 分

（2）如图，以点D为原点建立空间直角坐标系，$BD = \sqrt{3}$，

则$A(1,0,0), B\left(0,\sqrt{3},0\right), P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$ ………………8 分

则$\overrightarrow{AP} = \left(-1,0,\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BP} = \left(0,-\sqrt{3},\sqrt{3}\right), \overrightarrow{DP} = \left(0,0,\sqrt{3}\right)$ …9 分



设平面PAB的法向量$\overrightarrow{n_1} = (x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AP} = -x + \sqrt{3}z = 0 \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{BP} = -\sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 0\end{cases}$，可取$\overrightarrow{n_1} = \left(\sqrt{3},1,1\right)$ …11 分

设平面PDA的法向量$\overrightarrow{n_2} = \left(0,\sqrt{3},0\right)$ ……………………12 分

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ……………………………14 分

所以平面PDA与平面PAB所成夹角的正切值为 2 ………15 分

17.解：（1）因为$f(x) = e^x - ax - 1$，其中$x \in \boldsymbol{R}$，$f'(x) = e^x - a$ ……………1 分

①当$a \le 0$ 时，$f'(x) = e^x - a > 0$ 恒成立，$f(x)$在 R 上单调递增……………3 分

②当$a > 0$ 时，令$f'(x) = 0$，得$x = \ln a$，

由$f'(x) < 0$ 可得$x < \ln a$；由$f'(x) > 0$ 可得$x > \ln a$…………………………5 分

此时，函数$f(x)$在$(-\infty, \ln a)$上单调递减，在$(\ln a, +\infty)$上单调递增

综上所述：当$a \le 0$ 时，$f(x)$在 R 上单调递增；

当$a > 0$ 时，函数$f(x)$在$(-\infty, \ln a)$上单调递减，在$(\ln a, +\infty)$上单调递增……6 分

（2）当$a = 2$ 时，$g(x) = e^x - 2x - 1 - x^2$，$g'(x) = e^x - 2 - 2x$ ……………7 分

令$g'(x) = h(x)$，则$h'(x) = e^x - 2$

由$h'(x) = 0$ 得，$x = \ln 2$

当$x \in (0, \ln 2)$时，$h'(x) < 0$，$h(x)$单减

当$x \in (\ln 2，+\infty)$时，$h'(x) > 0$，$h(x)$单增 ………………………………9 分

又因为$g'(0) = h(0) = -1 < 0$

$g'(\frac{3}{2})=h(\frac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}-5<0$

$g'(2)=h(2)=e^2-6>0$

所以存在唯一的$x_0\in(\frac{3}{2},2)$，使得$h(x_0)=0$，即$e^{x_0}=2x_0+2$ ……………11 分

所以当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单减

当$x\in(x_0,+\infty)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单增

所以x_0是$g(x)$在$(0,+\infty)$上唯一极小值点 ……………………………………13 分

则$g(x_0)=e^{x_0}-2x_0-1-{x_0}^2=-{x_0}^2+1$

因为$x_0\in(\frac{3}{2},2)$，且$g(x_0)$在$(\frac{3}{2},2)$单减

所以$g(x_0)<g(\frac{3}{2})=-\frac{5}{4}$ ……………………………………………………15 分

18. 解：（1）由已知$P(X=3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$， $P(Y=0)=\frac{1}{24}+\frac{1}{8}=\frac{1}{6}$ ……4 分

（2）（i）“$Y|X=3$”的可能取值为 0, 2, 4 ……………………………………5 分

因为$P(X=3)=\frac{5}{8}$，

$P(X=3$ 且$Y=0)=\frac{1}{8},P(X=3$ 且$Y=2)=\frac{1}{8},P(X=3$ 且$Y=4)=\frac{3}{8}$ ……6 分

所以$P(Y=0|X=3)=\frac{P(X=3,Y=0)}{P(X=3)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$ ………………………………7 分

$P(Y=2|X=3)=\frac{P(X=3,Y=2)}{P(X=3)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$ ………………………………………8 分

$P(Y=4|X=3)=\frac{P(X=3,Y=4)}{P(X=3)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{5}$ ………………………………………9 分

所以“$Y|X=3$”分布列为

$Y\|X=3$	0	2	4
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

……………………………………10 分

（ii）因为$P(X=1)=\frac{3}{8},P(X=3)=\frac{5}{8}$，所以$E(X)=1\times\frac{3}{8}+3\times\frac{5}{8}=\frac{9}{4}$ ………12 分

因为$P(Y=0)=\frac{1}{6},P(Y=2)=\frac{5}{24},P(Y=4)=\frac{5}{8}$，

所以$P(X=1|\,Y=0)=\frac{1}{4},P(X=3|\,Y=0)=\frac{3}{4}$，$E(X|Y=0)=\frac{5}{2}$ ………………13 分

$P(X=1|\,Y=2)=\frac{2}{5}$，$P(X=3|\,Y=2)=\frac{3}{5}$，$E(X|Y=2)=\frac{11}{5}$ ……………14 分

$P(X=1|\,Y=4)=\frac{2}{5}$，$P(X=3|\,Y=4)=\frac{3}{5}$，$E(X|Y=4)=\frac{11}{5}$ ……………15 分

所以$\sum_{i=1}^{3}[P(Y=y_i)\cdot E(X\,|\,Y=y_i)]=\frac{1}{6}\times\frac{5}{2}+\frac{5}{24}\times\frac{11}{5}+\frac{5}{8}\times\frac{11}{5}=\frac{9}{4}$ ……………………16 分

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{3}[P(Y=y_i)\cdot E(X|Y=y_i)]$ ……………………………………………17 分

19.解：（1）由 C 的离心率为$\sqrt{5}$，点$P_1(1,-1)$在 C 上，

得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\sqrt{5}\\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ c^2=a^2+b^2\end{cases}$， ……………………………………………2 分

所以$a^2=\frac{3}{4}$，$b^2=3$，曲线 C 的方程为$\frac{4x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$ ………………………4 分

（2） 由$P_n(x_n,y_n)$得$Q_{n-1}(-x_n,y_n)$

因为直线$P_{n-1}Q_{n-1}$的斜率为-1，

所以$\frac{y_{n-1}-y_n}{x_{n-1}+x_n}=-1$，即$x_n+x_{n-1}=y_n-y_{n-1}$ ……………………………5 分

又因为$\begin{cases}4x_n^2-y_n^2=3\\ 4x_{n-1}^2-y_{n-1}^2=3\end{cases}$，

两式相减得：$4(x_n+x_{n-1})(x_n-x_{n-1})=(y_n+y_{n-1})(y_n-y_{n-1})$

所以 $4x_n-4x_{n-1}=y_n+y_{n-1}$ ………………………………………………7 分

又因为 $2x_n+2x_{n-1}=2y_n-2y_{n-1}$，

两式相减得：$2x_n-6x_{n-1}=-y_n+3y_{n-1}$ ……………………………………9 分

所以 $2x_n+y_n=3(2x_{n-1}+y_{n-1})$，而 $2x_1+y_1=1$

所以数列$\{2x_n+y_n\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列 ……………………10 分

（3）由（2）得 $2x_n+y_n=3^{n-1}$①

又因为 $4x_n^2-y_n^2=3$，所以$(2x_n-y_n)(2x_n+y_n)=3$

所以 $2x_n-y_n=3^{2-n}$②

由①②得：$x_n=\frac{3^{n-1}+3^{2-n}}{4}$，$y_n=\frac{3^{n-1}-3^{2-n}}{2}$ ……………………………12 分

直线$P_{n+1}P_{n+2}$的斜率：$k_1=\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}}=\frac{3^{n+1}-2x_{n+2}-3^n+2x_{n+1}}{x_{n+2}-x_{n+1}}=\frac{4\times3^n}{3^n-3^{-n}}-2$，

直线P_nP_{n+3}的斜率：$k_2=\frac{y_{n+3}-y_n}{x_{n+3}-x_n}=\frac{3^{n+2}-2x_{n+3}-3^{n-1}+2x_n}{x_{n+3}-x_n}=\frac{4\times3^n}{3^n-3^{-n}}-2$

所以$k_1=k_2$，直线$P_{n+1}P_{n+2}$与P_nP_{n+3}平行，所以 $S_n=S_{n+1}$

所以$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积$S_n$为定值 ………………………………………14 分

四边形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积

$T_n=\frac{1}{2}|P_{n+1}Q_n|\cdot|y_{n+2}-y_n|=\frac{1}{2}\times2x_{n+1}|y_{n+2}-y_n|=(3^n+\frac{3}{3^n})(\frac{3^n}{3}+\frac{1}{3^n})$ …15 分

令$t=3^n$，则$T_n=(t+\frac{3}{t})(\frac{t}{3}+\frac{1}{t})=\frac{1}{3}t^2+\frac{3}{t^2}+2=f(t)$ ……………………16 分

当$t>\sqrt{3}$时，$f(t)$单调递增，

所以当 n=1 时，$f(t)$取得最小值，即$\frac{T_n}{S_n}$取得最小值 …………………………17 分