秘密★启用前

高 2023 级第二次模拟考试

数学试题

本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、座位号和准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3\}$，则

A．$B\subsetneq A$　　B．$A\subsetneq B$　　C．$A\cap B=\varnothing$　　D．$A=B$

2．已知不共线向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 满足 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})//(3\vec{a}-\vec{b})$，则 $\lambda=$

A．$\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$-\frac{2}{3}$

3．已知 l，m 是两条不同的直线，且 m 在平面 α 内，则“$l\perp m$”是“$l\perp\alpha$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

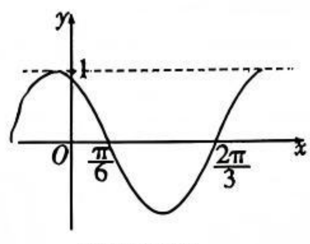
4．甲乙两位同学从 6 种不同的课外读物中各自选读 2 种，则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有

A．30 种　　B．60 种　　C．120 种　　D．240 种

5．函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象如图所示，则 $\sin(\omega x+\varphi)=$

A．$\sin(x+\frac{\pi}{3})$　　B．$\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

C．$\cos(2x-\frac{\pi}{6})$　　D．$\cos(2x+\frac{\pi}{6})$



第 5 题图

6. 已知4个不全相等的正整数的平均数与中位数都是2，则这组数据的极差为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

7. 已知点 P 为抛物线 C：$x^2=8y$ 上的动点，点 Q 为圆 M：$x^2+y^2-2x-8y+16=0$ 上的动点，点 F 为抛物线 C 的焦点，则 $|PF|+|PQ|$ 的最小值为

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

8. 借助信息技术计算 $(1+\frac{1}{n})^n(n\in N^*)$ 的值，我们发现当 $n=1,10,100,1000,10000,\cdots$ 时，$(1+\frac{1}{n})^n$ 的底数越来越小，而指数越来越大，随着 n 越来越大，$(1+\frac{1}{n})^n$ 会无限趋近于 e（e=2.71828…是自然对数的底数），根据以上知识判断，当 n 越来越大时，$(\frac{3}{2}n+1)\ln(1+\frac{3}{n})$ 会无限趋近于

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项是符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 椭圆 C：$\frac{x}{m^2+1}+\frac{y^2}{m^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 A，直线 AF_1 与 C 的另一个交点为 B，若 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$，则

A. C 的短轴长为 $\sqrt{3}$　　B. C 的焦距为2

C. $\triangle ABF_2$ 的周长为8　　D. C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 下列几何体中，能够被整体放入棱长为1（单位：m）的正方体容器（容器壁厚度忽略不计）内的有

A. 直径为 $0.99m$ 的球体

B. 底面直径为 $0.01m$，高为 $1.8m$ 的圆柱体

C. 底面直径为 $0.8m$，高为 $1.1m$ 的圆锥体

D. 所有棱长均为 $1.4m$ 的四面体

11. 已知定义在R上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=2$，$f(3-x)+f(x)=1$，设 $f(x)$ 在R上的导函数为 $g(x)$，则

A. $g(2025)=0$　　B. $g(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$　　C. $g(x-6)=g(x)$　　D. $\sum_{n=1}^{2027}f(n)=1012$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．设复数 Z 满足 $(1-i)Z=2i$（i 为虚数单位），则 $|Z|=$_______.

13．记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和（$n\in N^*$），已知 $a_1=1$，$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 1 的等差数列，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_______

14．设函数 $f(x)=\sin^n x+\cos^n x(n\in N^*)$．当 $n=4$ 时，$f(x)$ 的值域为_______，若存在 n，使得关于 x 的不等式 $f(x)-a(\sin x+\cos x)+a\geq 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_______

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．（13 分）记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2a\cos A+b\cos C=c\cos(A+C)$.

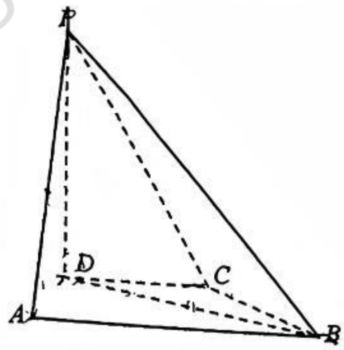
（1）求角 A 的大小；

（2）若 $a=\sqrt{21}$，△ABC 的面积为 $\sqrt{3}$，求△ABC 的周长.

16．（15 分）在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$底面 $ABCD$，$CD// AB$，$AD=DC=CB=1$，$AB=2$，$DP=\sqrt{3}$.

（1）证明：$BD\perp PA$；

（2）求平面 PDA 与平面 PAB 的夹角的正切值.



第 16 题图

17．（15 分）已知函数 $f(x)=e^x-ax-1$，$a\in R$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 $g(x)=f(x)-x^2$，当 $a=2$ 时，$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的极小值点为 x_0，求证：$g(x_0)<-\dfrac{5}{4}$.

注：$e^3\approx 20.09$

18.（17 分）已知(X,Y)是二维离散型随机变量，其中 X、Y 是两个相互独立的离散型随机变量，(X,Y)的分布列如下表：

X \ Y	0	2	4
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

（1）求 $P(X=3)$和 $P(Y=0)$；

（2）“$Y|X=x$” 表示在 $X=x$ 条件下 Y 的取值．

（i）求 “$Y|X=3$” 的分布列；

（ii）$E(X)$为 X 的数学期望，$E(X|Y=y_i)$为 “$X|Y=y_i$” 的数学期望，

证明：$E(X)=\sum_{i=1}^{3}[P(Y=y_i)\cdot E(X|Y=y_i)]$．

19.（17 分）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,b>0)$ 的离心率为$\sqrt{5}$，点 $P_1(1,-1)$ 为双曲线 C 上的点，按如下方式依次构造点 $P_n(n\geq 2且n\in N^*)$，过点 P_{n-1} 作斜率为-1 的直线与双曲线 C 的另一支交于点 Q_{n-1}，点 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点为P_n，记P_n的坐标为(x_n,y_n) $(x_n>0)$．

（1）求曲线 C 的方程；

（2）证明 $\{2x_n+y_n\}$ 为等比数列；

（3）记$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积为$S_n$，四边形$P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$的面积为$T_n$，求 n 取何值时 $\frac{T_n}{S_n}$ 最小