绵阳南山中学高2023级高三第六次教学质量检测

数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	D	B	C	B	C	D	D	A	ABD	ABC	AD

1. $D.\complement_{R}A=\{x|x^2-2x-8<0\}=(-2,4)$，所以$B\cap\complement_{R}A=\{-1,1,2\}$，故选$D$.

2. B.当$x=0$时$|x+1|>1$不成立，所以命题p是假命题，显然命题q是真命题，故选B.

3. C.（成都一诊第6题）对于A:空间中垂直于同一直线的两条直线，可能平行、相交或异面，错；对于B:空间中平行于同一直线的两个平面，可能平行或相交，错；对于C:若一个平面经过另一个平面的一条垂线，根据面面垂直的判定定理知这两个平面互相垂直，对；对于D:在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，A_1,B_1,C三点到平面ABC_1D_1的距离都相等，但平面A_1B_1C与平面ABC_1D_1并不平行，错.故选C.

4. B.由等差数列的性质知必要性成立，数列:1,5,3,7满足$a_1+a_4=a_2+a_3$，但不是等差数列，故选B,

5. C.令$x=1$，得$(1-a)^5=32$，解得$a=-1$，所以$X\sim N(\mu,4)$且$P(X>5)=P(X<-1)$，则$\mu=\frac{-1+5}{2}=2$，故选C.

6. D.(必修第二册P61第13(6)题改编)当三个平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两夹角都为0时，显然$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{c}$上的投影向量是$2\vec{c}$.

当三个平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$两两夹角都为$\frac{2\pi}{3}$时，因$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，所以$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$，

则$\vec{a}+\vec{b}$在$\vec{c}$上的投影向量为$\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\cdot\vec{c}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}}{1^2}\cdot\vec{c}=-\vec{c}$.故选$D$.

7. D.令$g(x)=x-\frac{1}{x}-\ln x$，则$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-x+1}{x^2}=\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{x^2}>0$，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，注意到$g(1)=1-\frac{1}{1}-\ln1=0$，因此$g(x)$在$(0,1)$内，$g(x)<0$，在$(1,+\infty)$内，$g(x)>0$，因为$f(x)=\left(x-\frac{1}{x}-\ln x\right)(ae^{x-1}+b-1)\leqslant0$恒成立，因此$a<0$.

令$h(x)=ae^{x-1}+b-1(x>0)$，则$h(x)$在$(0,1)$内，$h(x)\geqslant0$，在$(1,+\infty)$内，$h(x)\leqslant0$，

所以$h(x)$在$x=1$处取得零点，即$h(1)=ae^0+b-1=a+b-1=0$，得$a+b=1$.

又因为$a<0$，那么由$a+b=1$，得$b=1-a>1>0$.

对于A:因为$a+b=1>0$，故A错误;

对于B:$a<0,b>0,ab<0$，故B错误;

对于C、D:因为$a^2+b^2=a^2+(1-a)^2=2a^2-2a+1=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(a<0)$，则$a^2+b^2$在$a\in(-\infty,0)$单调递减，所以$a^2+b^2>1$.故$D$正确，$C$错误.故选$D$.

8. A.因为$\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)-(a+2)\right]<0$，所以$a<\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)<a+2$，

因为函数$y=\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$的周期为4，先考虑一条直线$y=t(t\in R)$与函数的整点交点.

注意到在一个周期$(0,4]$内，可能存在的整点有1,3,4，可得$t\in\{-1,0,1\}$.以下分情况讨论:

①当$t=-1$时，$x=3+4k,k=0,1,2,\cdots,505$，有506个整点;

②当$t=0$时，$x=4+4k,k=0,1,2,\cdots,505$，有506个整点;

③当$t=1$时，$x=1+4k,k=0,1,2,\cdots,506$，有507个整点;

再考虑直线$y=a$与$y=a+2$所包围的区域(不含边界)，注意到区间$(a,a+2)$的长度为2.

当$-2<a<0$时，则可能$-1,0\in(a,a+2)$，就有$506+506=1012$个整点;

也可能$0,1\in(a,a+2)$，就有$506+507=1013$个整点;故B可能;

当$-3<a\leqslant-2$时，$-1\in(a,a+2)$，就有506个整点，当$0\leqslant a<1$时，$1\in(a,a+2)$，就有507个整点，

故 C 可能；

而当 $a\leqslant -3$ 或 $a\geqslant 1$ 时，$\{-1,0,1\}$ 中没有元素 $\in(a,a+2)$，就有 0 个整点，故 D 可能. 故选 A.

9. ABD. 对于 A：由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}f'(-2)x$，求导得 $f'(x)=x^2-x-\frac{1}{2}f'(-2)$，

令 $x=-2$，得 $f'(-2)=4$，故 A 正确；

对于 B：由 A 知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，则 $f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. 所以，当 $x\in(-\infty,-1)$ 和 $(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，当 $x\in(-1,2)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，所以 $f(x)$ 有且仅有两个极值点 $x=-1$ 和 $x=2$，故 B 正确；

对于 C：$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x=\frac{1}{6}x(2x^2-3x-12)=0\Rightarrow x=0$，或 $2x^2-3x-12=0$，

由 $2x^2-3x-12=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{105}}{4}$，因此 $f(x)$ 有且仅有三个零点，故 C 错误；

对于 D：$f(-1)=\frac{1}{3}\times(-1)^3-\frac{1}{2}\times(-1)^2-2\times(-1)=\frac{7}{6}$，令 $\frac{7}{6}=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$，得 $x=-1$ 或 $x=\frac{7}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $(-2,a)$ 上有最大值，则 $-1<a\leqslant\frac{7}{2}$，故 D 正确. 故选 ABD.

10. ABC.(选择性必修第三册 P53 第 6、10 题改编) 对于 A，

由全概率公式得，$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$，故 A 正确；

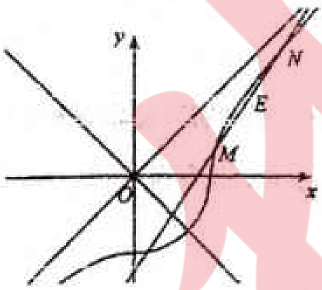
对于 B，$P(B|A)=P(B)$，所以 A，B 相互独立，

那么 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$，故 B 正确；

对于 C，$P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)=P(A)\cdot\frac{P(AB)}{P(A)}\cdot\frac{P(ABC)}{P(AB)}=P(ABC)$，故 C 正确；

对于 D，$P(B|A)$ 表示在 A 发生的条件下 B 发生的概率，$P(B|\overline{A})$ 表示在 $\overline{A}$ 发生的条件下 B 发生的概率，两者之和不一定为 1，例如：设 A 为"掷骰子点数为偶数"，$\overline{A}$ 为"掷骰子点数为奇数"，B 为"掷骰子点数大于 2"，则 $P(B|A)=\frac{2}{3}$，$P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}$，和为 $\frac{4}{3}$，D 错误. 故选 ABC.

11. AD. $x|x|-y|y|=4\Rightarrow\begin{cases}x^2-y^2=4 & (x\geqslant 2,y\geqslant 0)\\ y^2-x^2=4 & (x\leqslant 0,y\leqslant -2)\\ x^2+y^2=4 & (0<x<2,-2<y<0)\end{cases}$，如图可知曲线 C 是一函数的图象. 过点 $(0,1)$ 没有与曲线 C 相切的直线.



当点 P 在一、三象限时，点 $P(x,y)$ 到 $y=x$ 与 $y=-x$ 的距离之积为 $\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}\times\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}=\frac{|x^2-y^2|}{2}=2$，则四边形 $OAPB$ 面积为 2. 当点 P 在四象限时，令 $P(2\cos\alpha,2\sin\alpha)$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，点 P 到 $y=x$ 与 $y=-x$ 的距离之积为 $\frac{|2\cos\alpha-2\sin\alpha|}{\sqrt{2}}\times\frac{|2\cos\alpha+2\sin\alpha|}{\sqrt{2}}=2|\cos2\alpha|\in[0,2)$. 综上，四边形 $OAPB$ 面积的最大值为 2.

存在过 $E(3,2)$ 的直线 l：$y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ 与 C 在一象限交于 M、N 两点，使得线段 MN 被点 E 平分.

故选 AD.

二、填空题

12. $\frac{1}{5}$　　13. 1　　14. $P(-1,\sqrt{2})$ 或 $P(-1,-\sqrt{2})$

12. $\frac{1}{5}$. 因为 $\frac{1}{z}=2+\mathrm{i}\Rightarrow\frac{1}{|z|}=|2+\mathrm{i}|=\sqrt{5}\Rightarrow|z|=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\therefore z\cdot\bar{z}=|z|^2=\frac{1}{5}$.

13. 1. 由单位圆可知，当 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称时，$\cos\beta=-\cos\alpha$,

因为 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，令 $t=\cos\frac{\alpha}{2}$，那么 $t\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

所以 $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\beta=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha=\cos\frac{\alpha}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right)=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$,

那么 $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\beta$ 在 $t\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上单调递减，所以 $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\beta$ 的最大值为1.

14. $P(-1,\sqrt{2})$ 或 $P(-1,-\sqrt{2})$.

设 $P(x,y)$，则 $x\neq0$，直线 l:$x=1$ 与圆 O:$x^2+y^2=1$ 相切于点 T，则 $T(1,0)$,

以 P 为圆心，PA 为半径的圆恰与 l 相切，则可得 $|x-1|=|PA|=\sqrt{OA^2+OP^2}=\sqrt{x^2+y^2+1}$,

化简可得 $y^2=-2x$，且 $x\neq0$.

再设 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0^2=-2x_0(x_0<0)$,

则 $\cos\angle PTO=\frac{|1-x_0|}{|PT|}=\frac{|1-x_0|}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}}=\frac{|1-x_0|}{\sqrt{(x_0-1)^2-2x_0}}=\sqrt{1+\frac{2}{x_0+\frac{1}{x_0}-4}}$,

由于对勾函数 $y=x+\frac{1}{x}(x<0)$ 在 $x\in(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $x\in(-1,0)$ 上单调递减，

所以当 $x_0=-1$ 时，$x_0+\frac{1}{x_0}$ 有最大值 -2，则 $\cos\angle PTO$ 取得最小值，此时 $P(-1,\sqrt{2})$ 或 $P(-1,-\sqrt{2})$.

故答案为 $P(-1,\sqrt{2})$ 或 $P(-1,-\sqrt{2})$.

三、解答题

15. (1) 已知 $a\sin B=\sqrt{3}b\cos A$，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

得 $a\sin B=b\sin A=\sqrt{3}b\cos A$，显然 $\cos A\neq0$,

得 $\tan A=\sqrt{3}$，由 $0<A<\pi$，得 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,

因为 $c=6$,$a=\sqrt{7}b$，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

则 $(\sqrt{7}b)^2=b^2+6^2-2b\times6\times\frac{1}{2}=b^2+36-6b$，解得 $b=2$($b=-3$ 舍去)，故 $b=2$.

(2) 因为 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Rightarrow4|\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$,

所以 $4|\overrightarrow{AD}|^2=36+4+2\times6\times2\times\cos A\Rightarrow AD=\sqrt{13}$.

16. (1) 由题意知随机变量 ξ 服从超几何分布，其中 $N=7$,$M=5$,$n=4$，且 ξ 的所有可能取值为2,3,4,

$P(\xi=2)=\frac{C_5^2C_2^2}{C_7^4}=\frac{2}{7}$,$P(\xi=3)=\frac{C_5^3C_2^1}{C_7^4}=\frac{4}{7}$,$P(\xi=4)=\frac{C_5^4C_2^0}{C_7^4}=\frac{1}{7}$，故 ξ 的分布列为:

ξ	2	3	4
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

解法一　所以 ξ 的数学期望 $E(\xi)=2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{4}{7}+4\times\frac{1}{7}=\frac{20}{7}$.

解法二　根据超几何分布的期望公式知 $E(\xi)=n\cdot\frac{M}{N}=4\times\frac{5}{7}=\frac{20}{7}$.

(2)(一轮《创新设计》大本 P271 例 2 改编) 记“下达的动作指令表述清晰”为事件 A，记“下达的动作指令表述模糊”为事件 B，记“机器人成功完成指令”为事件 C.

由已知得,$P(C)=0.8$,$P(C|A)=0.9$,$P(C|B)=0.5$,$P(B)=p$,$P(A)=1-p$.

因为 $P(C)=P(AC)+P(BC)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=0.9(1-p)+0.5p=0.9-0.4p$,

所以 $0.9-0.4p=0.8\Rightarrow p=0.25$.

(3)$\bar{x}=\dfrac{2+4+5+6+8}{5}=5,\bar{y}=\dfrac{8+7+6+5+4}{5}=6$.

因为 $\hat{y}=a-0.7x$ 经过点 $(5,6)$, 所以 $6=a-3.5\Rightarrow a=9.5$, 回归方程为 $\hat{y}=9.5-0.7x$.

当 $x=10$ 时, $\hat{y}=9.5-7=2.5$, 故预测当练习次数为10时, 完成时间约为2.5秒.

17. (1) 由 $\begin{cases}x_0x+my_0y-m=0\\x^2+my^2=m\end{cases}\Rightarrow(m-my_0y)^2+mx_0^2y^2=mx_0^2\Rightarrow(x_0^2+my_0^2)y^2-2my_0y+m-x_0^2=0$.

因为 $x_0^2+my_0^2=m(m\neq0)$, 于是 $my^2-2my_0y+my_0^2=0$.

所以 $\Delta=4m^2y_0^2-4m^2y_0^2=0$, 于是直线 l 与曲线 E 相切.

(2) **解法一** 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

易知, 当 $x_1=x_2$ 时, 由对称性可知, $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$.

当 $x_1\neq x_2$ 时, 不访设 $x_2<x_0<x_1$, 易知 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|AM|}{|BM|}=\dfrac{|x_1-x_0|}{|x_2-x_0|}=\dfrac{x_1-x_0}{x_0-x_2}$.

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-2=0\\y=\sqrt{2}\end{cases}$, 解得 $x_1=\dfrac{2-2\sqrt{2}y_0}{x_0},y_1=\sqrt{2}$,

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-2=0\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$, 解得 $x_2=\dfrac{2+2\sqrt{2}y_0}{x_0},y_2=-\sqrt{2}$.

所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{x_1-x_0}{x_0-x_2}=\dfrac{\dfrac{2-2\sqrt{2}y_0}{x_0}-x_0}{x_0-\dfrac{2+2\sqrt{2}y_0}{x_0}}=\dfrac{2-2\sqrt{2}y_0-x_0^2}{x_0^2-2\sqrt{2}y_0-2}=\dfrac{2y_0^2-2\sqrt{2}y_0}{-2y_0^2-2\sqrt{2}y_0}=\dfrac{\sqrt{2}-y_0}{\sqrt{2}+y_0}$.

$$\frac{|OA|}{|OB|}=\sqrt{\frac{\left(\dfrac{2-2\sqrt{2}y_0}{x_0}\right)^2+2}{\left(\dfrac{2+2\sqrt{2}y_0}{x_0}\right)^2+2}}=\sqrt{\frac{(2-2\sqrt{2}y_0)^2+2x_0^2}{(2+2\sqrt{2}y_0)^2+2x_0^2}}=\sqrt{\frac{2y_0^2-4\sqrt{2}y_0+4}{2y_0^2+4\sqrt{2}y_0+4}}=\frac{\sqrt{2}-y_0}{\sqrt{2}+y_0},$$

故 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$.

综上: $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$.

解法二 不妨设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

易知, 当 $x_1=x_2$ 时, 由对称性可知, $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{|OA|}{|OB|}$.

当 $x_1\neq x_2$ 时, 不访设 $x_1<x_0<x_2$.

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-2=0\\y=\sqrt{2}\end{cases}$, 解得 $x_1=\dfrac{2-2\sqrt{2}y_0}{x_0},y_1=\sqrt{2}$,

联立 $\begin{cases}x_0x+2y_0y-2=0\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$, 解得 $x_2=\dfrac{2+2\sqrt{2}y_0}{x_0},y_2=-\sqrt{2}$.

若 $x_1=0$, 则 $y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2},x_0=\pm1,x_2=\pm4$,

由对称性, 不妨取 $x_0=1,x_2=4$, 则 $A(0,\sqrt{2}),B(4,-\sqrt{2}),M\left(1,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\tan\angle AOM=\sqrt{2},\tan\angle BOM=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2}$, 所以 $\angle AOM=\angle BOM$.

同理, 当 $x_2=0$ 时, $\angle AOM=\angle BOM$.

当 $x_1x_2\neq0$ 时, 则 $k_{OA}=\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{\sqrt{2}x_0}{2-2\sqrt{2}y_0}=\dfrac{x_0}{\sqrt{2}-2y_0},k_{OB}=\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{-\sqrt{2}x_0}{2+2\sqrt{2}y_0}=-\dfrac{x_0}{\sqrt{2}+2y_0},k_{OM}=\dfrac{y_0}{x_0}$,

又 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，所以 $x_0^2+2y_0^2=2$，

所以 $\tan\angle AOM=\frac{k_{OA}-k_{OM}}{1+k_{OA}\cdot k_{OM}}=\frac{\frac{x_0}{\sqrt{2}-2y_0}-\frac{y_0}{x_0}}{1+\frac{x_0}{\sqrt{2}-2y_0}\times\frac{y_0}{x_0}}=-\frac{x_0^2+2y_0^2-\sqrt{2}y_0}{x_0(y_0-\sqrt{2})}=-\frac{2-\sqrt{2}y_0}{x_0(y_0-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{x_0}$.

$\tan\angle BOM=\frac{k_{OM}-k_{OB}}{1+k_{OM}\cdot k_{OB}}=\frac{\frac{y_0}{x_0}+\frac{x_0}{\sqrt{2}+2y_0}}{1+\frac{y_0}{x_0}\times\left(-\frac{x_0}{\sqrt{2}+2y_0}\right)}=\frac{x_0^2+2y_0^2+\sqrt{2}y_0}{x_0(y_0+\sqrt{2})}=\frac{2+\sqrt{2}y_0}{x_0(y_0+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{x_0}$.

则 $\tan\angle AOM=\tan\angle BOM$，即 $\angle AOM=\angle BOM$，所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{|OA||OM|\sin\angle AOM}{|OB||OM|\sin\angle BOM}=\frac{|OA|}{|OB|}$.

综上：$\frac{S_1}{S_2}=\frac{|OA|}{|OB|}$.

18. (1) 当 $n=1$ 时，可得 $f(x)=(x-1)e^x-\frac{1}{2}x^2$，$f'(x)=xe^x-x=x(e^x-1)$.

当 $x>0$ 时 $e^x-1>0$；当 $x<0$ 时 $e^x-1<0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，于是 $f(x)$ 在R上单调递增.

因 $f(0)=-1$，$f'(0)=0$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-1$.

(2) (i) $f'(x)=(x+1-n)e^x-x$，$f''(x)=(x+2-n)e^x-1$，$f'''(x)=(x+3-n)e^x$.

令 $f'''(x)=(x+3-n)e^x>0\Rightarrow x>n-3$，所以 $f''(x)$ 在 $(-\infty,n-3)$ 上单调递减，在 $(n-3,+\infty)$ 上单调递增. 因为 $f''(n-3)=-e^{n-3}-1<0$，$f''(n-2)=-1<0$，$f''(n-1)=e^{n-1}-1>0$，

当 $x\to-\infty$ 时，$f''(x)\to-1$，所以存在 $x_0\in(n-2,n-1)$ 使得 $f''(x_0)=0$. 于是 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f'(n-1)=-(n-1)<0$，$f'(n)=e^n-n>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(n-1,n)$ 内存在唯一零点，即 $f(x)$ 在 $(n-1,n)$ 内有唯一极值点且为极小值点.

又因为 $f'(0)=1-n<0$，当 $x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，于是 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内存在唯一零点，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有唯一极值点且为极大值点.

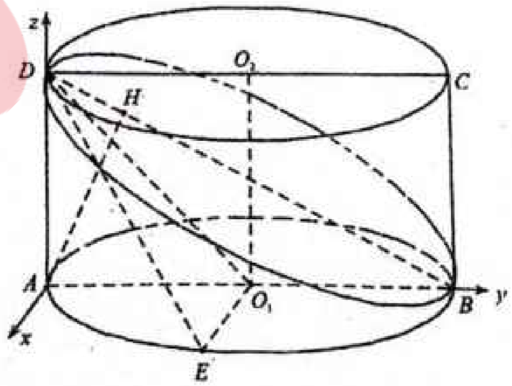
综上：$f(x)$ 在R上有两个极值点 x_n,y_n，且 $x_n<0<n-1<y_n<n$.

(ii) 由上知，$y_n>n-1$，所以 $y_k>k-1\Rightarrow e^{y_k}>e^{k-1}\Rightarrow\frac{1}{e^{y_k}}<\frac{1}{e^{k-1}}(k\geqslant 2)$.

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{e^{y_k}}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{e^{k-1}}=\frac{\frac{1}{e}\left[1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{e}}<\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}.$$

19. (一轮《创新设计》大本P197典例改编) (1) 过 A 作 AH 垂直于 DB，垂足为 H，由平面 $ABCD\perp\alpha$，知 $AH\perp\alpha$，则 AH 为点 A 到平面 α 的距离. 在 RtΔDAB 中，$AB=4$，$AD=2\Rightarrow BD=2\sqrt{5}$，所以 $AH=\frac{AD\times AB}{BD}=\frac{8}{2\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$. 所以，点 A 到平面 α 的距离 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(2) 以 A 为原点，AB 为 y 轴，AD 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(0,0,0)$, $O_1(0,2,0)$, $D(0,0,2)$. 令 $\angle AO_1E=\theta$, $\theta\in(0,\pi)$, 于是 $E(2\sin\theta,2-2\cos\theta,0)$.

$\overrightarrow{O_1E}=(2\sin\theta,-2\cos\theta,0)$, $\overrightarrow{O_1D}=(0,-2,2)$, 令平面 DO_1E 的法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{O_1E}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{O_1D}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x\sin\theta-2y\cos\theta=0\\ -2y+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\sin\theta=y\cos\theta\\ y=z\end{cases}$, 令 $\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta,\sin\theta)$.

由 (1) 知 $AH\perp\alpha$, 可得 $\overrightarrow{AH}=\left(0,\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$, 于是可令平面 α 的法向量 $\vec{n}=(0,1,2)$.

令平面 DO_1E 与平面 α 所成角为 β, 则 $\cos\beta=\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{3\sin\theta}{\sqrt{5}\sqrt{1+\sin^2\theta}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\theta}}}$.

因为 $1+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\geqslant 2$, 所以 $\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{5}\sqrt{1+\frac{1}{\sin^2\theta}}}\leqslant\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ (当 $\sin\theta=1$ 时取等).

所以, 当 E 为弧 AB 的中点时, 平面 DO_1E 与平面 α 所成角的余弦值取到最大值 $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

(3) 将圆柱沿母线 BC 剪开并展开成平面图形, 以 D 为原点, C_1C_2 方向 (水平向右) 为 x 轴正方向, AD 方向 (从 A 指向 D, 即竖直向上) 为 y 轴正方向, 建立平面直角坐标系. 令曲线上一点 $Q(x,y)$, 由对称性不妨令 $x>0$, $y<0$. 令 $\angle PO_2D=\alpha$, 则 $x=2\alpha$. 圆柱底面半径 $r=2$, 故底面圆周长为 4π, 展开后 x 轴对应弧长, 范围取 $[-2\pi,2\pi]$, 使得 D 对应 $x=0$, 剪开线 BC 对应 $x=\pm2\pi$.

如图, 过 P 作 DC 的垂线, 垂足为 N, 则 $PN=QM=2\sin\alpha$, $DN=2-2\cos\alpha$.

由题知截面 L 为椭圆, 其方程为 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 点 $Q(m,2\sin\alpha)$, 解得 $m=\pm\sqrt{5}\cos\alpha$,

于是 $DM=\sqrt{5}-\sqrt{5}\cos\alpha=\sqrt{5}(1-\cos\alpha)$.

由 $MN=\sqrt{DM^2-DN^2}$ 得 $MN=\sqrt{5(1-\cos\alpha)^2-4(1-\cos\alpha)^2}=1-\cos\alpha$.

所以 $y=-MN=\cos\alpha-1$, 将 $x=2\alpha$ 代入得 $y=\cos\dfrac{x}{2}-1$, $x\in[0,2\pi]$.

由对称性知, 曲线 L 的展开曲线方程为 $y=\cos\dfrac{x}{2}-1$, $x\in[-2\pi,2\pi]$.