

绵阳南山中学高2023级高三第六次教学质量检测

数学试题

本试卷满分150分，考试时间120分钟

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后，只将答题卡交回。

第I卷(选择题)

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 \geq 0\}$, $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, 则 $B \cap \complement_{\mathbb{R}} A =$ ()
 A. $\{-2\}$ B. $[-2, 4]$ C. $\{-2, -1, 1, 2\}$ D. $\{-1, 1, 2\}$
2. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbb{R}, |x+1| > 1$; 命题 $q: \exists x > 0, 2^x = \log_{0.5} x$, 则 ()
 A. p 和 q 都是真命题 B. $\neg p$ 和 q 都是真命题
 C. p 和 $\neg q$ 都是真命题 D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题
3. 在空间中，下列命题正确的是 ()
 A. 垂直于同一直线的两条直线平行
 B. 平行于同一直线的两个平面平行
 C. 若一个平面经过另一个平面的一条垂线，则这两个平面互相垂直
 D. 若一个平面内有三个不共线的点到另一个平面的距离相等，则这两个平面平行
4. 若 $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ 且 $m+n=p+q$, 则“ $a_m + a_n = a_p + a_q$ ”是“ $\{a_n\}$ 为等差数列”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
5. 已知二项式 $(\frac{1}{x} - ax)^5$ 的展开式中所有项的系数和为32, 若 $X \sim N(\mu, 4)$, 且 $P(X > 5) = P(X < a)$, 则 μ 等于 ()
 A. -1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3
6. 已知三个平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两的夹角相等, 且满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, 则向量 $\vec{a} + \vec{b}$ 在向量 \vec{c} 上的投影向量是 ()

- A. $-\vec{c}$ B. $2\vec{c}$ C. \vec{c} 或 $-2\vec{c}$ D. $-\vec{c}$ 或 $2\vec{c}$

7. 若 $f(x) = (x - \frac{1}{x} - \ln x)(ae^{x-1} + b - 1) \leq 0$ 恒成立, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a + b < 0$ B. $ab > 0$ C. $a^2 + b^2 < 1$ D. $a^2 + b^2 > 1$

8. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 不等式 $\tan^2(\frac{\pi}{4}x) - (2a + 2)\tan(\frac{\pi}{4}x) + a^2 + 2a < 0$ 在 $(0, 2026)$ 中的整数解有 m 个. 关于 m 的个数, 以下不可能的是 ()

- A. 1014 B. 1013 C. 507 D. 0

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}f'(-2)x$ 的导函数为 $f'(x)$, 则 ()

- A. $f'(-2) = 4$
 B. $f(x)$ 有且仅有两个极值点
 C. $f(x)$ 有且仅有两个零点
 D. 若 $f(x)$ 在 $(-2, a)$ 上有最大值, 则 $-1 < a \leq \frac{7}{2}$

10. 设 \bar{A}, \bar{B} 分别为随机事件 A, B 的对立事件, 以下概率均不为零, 则下列结论正确的有 ()

- A. $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$ B. 若 $P(B|A) = P(B)$, 则 $P(A|B) = P(A)$
 C. $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$ D. $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$

11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知曲线 $C: |x| - |y| = 4$, 则 ()

- A. 曲线 C 是某个函数的图象
 B. 过点 $(0, 1)$ 可作两条直线与曲线 C 相切
 C. 过曲线 C 上一点 P 作 $y = x$ 与 $y = -x$ 的垂线, 垂足分别为 A, B , 则四边形 $OAPB$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$
 D. 曲线 C 上存在两个不同的点 M, N , 使得线段 MN 被点 $E(3, 2)$ 平分

第 II 卷 (非选择题)

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知 i 是虚数单位, 复数 $\frac{1}{z} = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____.

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 与角 β 均以 Ox 为始边, 它们的终边关于 y 轴对称, 若 $\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, 则 $\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \beta$ 的最大值为 _____.

14. 已知直线 $l: x - 1 = 0$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 相切于点 T , A 是圆 O 上一动点, 点 P 满足 $PO \perp OA$, 且以 P 为圆心, PA 为半径的圆恰与 l 相切, 则当 $\cos \angle PTO$ 取最小值时, 点 P 的坐标可以为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 。已知 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A, c = 6, a = \sqrt{7} b$ 。

(1) 求 b 的值；

(2) 若 D 是 BC 边的中点，求 AD 的值。

16. (本小题满分 15 分)

在马年春节联欢晚会上，多款人形机器人惊艳亮相，其精彩的表演赢得了观众的一致好评。某款人形机器人在排练时，导演对机器人下达了 7 个动作指令，机器人成功完成了其中 5 个。现从这 7 个指令中随机抽取 4 个进行回放分析，以 ξ 表示抽取的指令中成功完成的个数。

(1) 求 ξ 的分布列和数学期望；

(2) 若对机器人下达的动作指令表述清晰，则机器人成功完成指令的概率为 0.9；若对机器人下达的动作指令表述模糊，则成功完成指令的概率为 0.5。设下达的动作指令表述模糊的概率为 p ，若该机器人成功完成指令的概率为 0.8，求 p 的值；

(3) 在排练过程中，记录了机器人完成某个特定动作的练习次数与所需时间(秒)的数据，如下表：

练习次数 x	2	4	5	6	8
完成时间 y	8	7	6	5	4

且 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = a - 0.7x$ ，预测当练习次数为 10 时，完成时间约为多少秒。

17. (本小题满分 15 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知曲线 $E: x^2 + my^2 = m (m \neq 0)$ ，点 $M(x_0, y_0) (x_0 \neq 0)$ 在曲线 E 上，直线 $l: x_0x + my_0y - m = 0$ 。

(1) 判断曲线 E 与直线 l 的位置关系，并证明；

(2) 当 $m = 2$ 时，直线 l 与直线 $y = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 分别交于 A, B 两点。设 $\triangle OAM$ 与 $\triangle OBM$ 的面积分别为 S_1, S_2 ，比较 $\frac{S_1}{S_2}$ 与 $\frac{|OA|}{|OB|}$ 的大小。

18. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = (x-n)e^x - \frac{1}{2}x^2$ (e 是自然对数的底数).

(1) 当 $n=1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间及曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

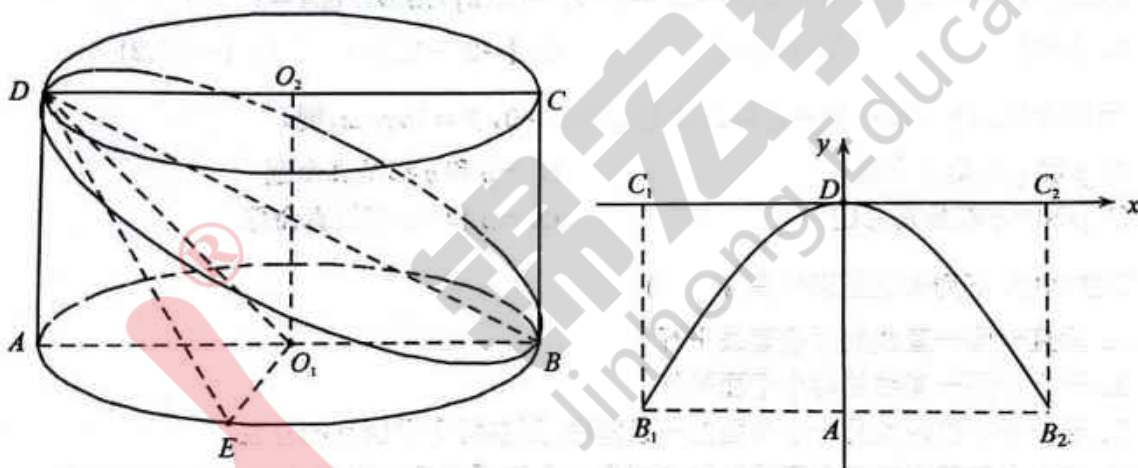
(2) 当 $n \geq 2 (n \in \mathbf{N})$ 时:

(i) 证明: $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上有两个极值点;

(ii) 设极小值点是 y_n , 证明: $\sum_{k=2}^n \frac{1}{e^{y_k}} < \frac{1}{e-1}$.

19. (本小题满分 17 分)

在如图所示的圆柱中, AB, DC 分别是下底面圆 O_1 、上底面圆 O_2 的直径, AD, BC 是圆柱的母线, $AB=4, BC=2$. 过直线 BD 且与平面 $ABCD$ 垂直的平面记为 α , 平面 α 与该圆柱侧面的交线记为 L (可以证明交线 L 是椭圆).



(1) 求点 A 到平面 α 的距离;

(2) 如图, 设 E 为底面弧 AB 上的动点, 求平面 DO_1E 与平面 α 所成角的余弦值的最大值;

(3) 将圆柱沿母线 BC 剪开, 并展开为如图所示的平面图形, 在平面展开图中, 以 D 为原点, 以 $\overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{DA}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系, 求 L 的平面展开曲线的方程.