2025—2026 学年度上期高 2024 级期末考试数学参考答案

一、选择题

1—4　BDCD　　5—8　BBAA

二、多项选择题

9．BCD　　10．BC　　11．ACD

三、填空题.

12．$y=\pm\frac{3x}{2}$　　13．$\frac{3}{4}$　　14．52π

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.【详解】（1）设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，

则$\begin{cases}S_2=2a_1+d=-22,\\ a_7=a_1+6d=0,\end{cases}$解得$a_1=-12,d=2$，故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-12+2(n-1)=2n-14$.…………6 分

（2）由（1）可知，$S_n=\frac{(2n-14-12)n}{2}=n(n-13)$，

所以$b_n=\frac{S_n}{n}=n-13$.易知$\{b_n\}$为等差数列.设$\{b_n\}$的前n项和为T_n，则$T_n=\frac{(-12+n-13)n}{2}=\frac{(n-25)n}{2}$，

所以数列$\{|b_n|\}$的前 20 项和为$T_{20}-2T_{13}=\frac{(20-25)\times20}{2}-2\times\frac{(13-25)\times13}{2}=106$……………………………13 分

16.【详解】（1）因为圆C经过$M(-1,2),N(1,0)$两点，所以线段MN的斜率为$k_{MN}=\frac{2-0}{-1-1}=-1$．因为圆$C$的圆心在直线$2x-y=0$上，所以设圆$C$的圆心为$(t,2t)$，

线段AB的中点为$D\left(\frac{-1+1}{2},\frac{2+0}{2}\right)=(0,1)$，所以$k_{CD}=\frac{2t-1}{t}=1$，解得$t=1$，所以$C(1,2)$，

$|CA|=\sqrt{(1+1)^2+(2-2)^2}=2$．　故圆$C$的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=4$．………………………………7 分

（2）依题意知$k\neq0$，圆心$C(1,2)$到直线$l_2:kx+y-k=0$的距离$d=\frac{|k+2-k|}{\sqrt{k^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$，

因为直线$l_2:kx+y-k=0$与圆C相交于A,B两点，所以弦长

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{4}{k^2+1}}=4\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times4\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}\times\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4|k|}{k^2+1}=\frac{4}{|k|+\frac{1}{|k|}}\leq2$.当且仅当$k=\pm1$时等号成立

故$\triangle ABC$面积的最大值为 2.　……………………………………………………15 分

17.【详解】（1）由频率分布直方图易知，$(0.040+0.030+0.016+a+0.004)\times10=1$，解得$a=0.010$，

由图知，$[90,100]$的频率为0.04．$[80,100]$的频率为$0.1+0.04=0.14$，

所以获奖学生最低分数线落在$[80,90)$内，不妨设为x，则$(90-x)\times0.01+0.04=0.1$，解得$x=84$，

所以估计获奖学生的最低分数线为 84 分．…………………………………………………4 分

（2）由图可知，$[70,80)$与$[80,90)$的频率之比是$0.4:0.1=4:1$，

由分层随机抽样的方法可知，在$[70,80)$内抽取 4 人，记为a_1,a_2,a_3,a_4，在$[80,90)$内抽取 1 人，记为b，

从这 5 人中选取 2 人，则该试验的样本空间为：

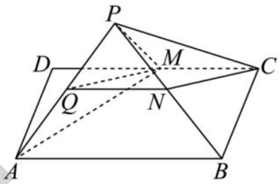
$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_1,a_4),(a_1,b),(a_2,a_3),(a_2,a_4),(a_2,b),(a_3,a_4),(a_3,b),(a_4,b)\}$，则 $n(\Omega)=10$，

记事件 A="这 2 人中恰有 1 人的成绩落在 $[70,80)$ 内"，则 $A=\{(a_1,b),(a_2,b),(a_3,b),(a_4,b)\}$，则 $n(A)=4$，由古典概型概率公式，可得 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$．……………………………………………9 分

（3）样本数据在 $[70,80)$ 内的人数为 $0.4\times100=40$，在 $[80,90)$ 内的人数为 $0.1\times100=10$，

$\bar{x}=\dfrac{40}{40+10}\times77+\dfrac{10}{40+10}\times82=78$，$s^2=\dfrac{40}{40+10}\left[9+(78-77)^2\right]+\dfrac{10}{40+10}\left[4+(78-82)^2\right]=12$．

所以这两组数据合并后的平均数 $\bar{x}$ 为 78，总方差 s^2 为 12．……………………………………15 分



18.【详解】（1）取 PA 中点 Q，连接 NQ,MQ，由 N 为 PB 中点，得

$NQ//AB,NQ=\dfrac{1}{2}AB$，依题意，$MC//AB,MC=\dfrac{1}{2}AB$，则 $NQ//MC,NQ=MC$，

于是四边形 $CMQN$ 是平行四边形，$CN//MQ$，而 $MQ\subset$ 平面 PAM，$NC\not\subset$ 平面 PAM，

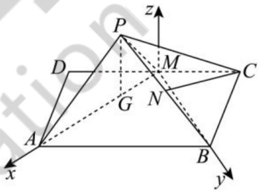
所以 $NC//$ 平面 PAM．…………………………………4 分

（2）取 AM 中点 G，连接 PG，由 $PM=PA=\sqrt{2}$，得 $PG\perp AM$，

而平面 $PAM\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAM\cap$ 平面 $ABCD=AM$，$PG\subset$ 平面 PAM，则 $PG\perp$ 平面 $ABCD$，

过 M 作 $Mz//PG$，则 $Mz\perp$ 平面 $ABCD$，又 $MA,MB\subset$ 平面 $ABCD$，

于是 $Mz\perp MA,Mz\perp MB$，



在矩形 $ABCD$ 中，$MA=MB=2$，$MA^2+MB^2=8=AB^2$，则 $MA\perp MB$，

以点 M 为原点，直线 MA,MB,Mz 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

则 $M(0,0,0),B(0,2,0),C(-1,1,0),P(1,0,1)$，$\overrightarrow{MB}=(0,2,0),\overrightarrow{MP}=(1,0,1),\overrightarrow{BC}=(-1,-1,0)$，

设平面 PMB 的法向量为 $\vec{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MB}=2b=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MP}=a+c=0\end{cases}$，令 $a=1$，得 $\vec{m}=(1,0,-1)$，

设直线 BC 与平面 PMB 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{BC}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以直线 BC 与平面 PMB 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$.……………………………………………10 分

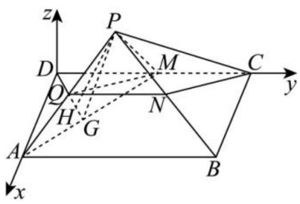
（3）连接 DG，由 $DA=DM$，得 $DG\perp AM$，而 $PG\perp AM$，则 $\angle PGD$ 为 $P-AM-D$ 的平面角，

即 $\angle PGD=\theta$，过点 D 作 $Dz\perp$ 平面 $ABCD$，以 D 为坐标原点，

直线 DA,DC,Dz 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(\sqrt{2},0,0)$，$M(0,\sqrt{2},0)$，$C(0,2\sqrt{2},0)$，显然 $AM\perp$ 平面 PGD，$AM\subset$ 平面 $ABCD$，

则平面 $PGD\perp$ 平面 $ABCD$，



在平面 PGD 内过 P 作 $PH\perp DG$ 于点 H，则 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，

设 $P(x_0,y_0,z_0)$，而 $PG=1$，则 $PH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$GH=\dfrac{1}{2}$，$DH=\dfrac{1}{2}$，即

$x_0=y_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$z_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，于是 $\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{PA}=(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，设平面 PAM 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0\\ \dfrac{3\sqrt{2}}{4}x_1-\dfrac{\sqrt{2}}{4}y_1-z_1\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0\end{cases}$，令 $z_1=\sqrt{2}$，得

$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2})$，设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，因为 $\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{7\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，

则 $\begin{cases}\sqrt{2}x_2=0\\ -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x_2+\dfrac{7\sqrt{2}}{4}y_2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，得 $\overrightarrow{n_2}=\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，设平面 PAM 和平面 PBC 的夹角为 α，则

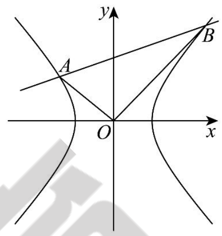
$\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\left|0+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\right|}{2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{55}}{2}}=\dfrac{\sqrt{55}}{11}$，所以平面 PAM 和平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{55}}{11}$．……………17 分

19.【详解】(1) 由题意可得$\begin{cases}2a=2\\ \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{12}{b^2}=1\end{cases}$，解得$a^2=1,b^2=4$，故双曲线方程为$C:x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$…………4 分

(2) 当直线l斜率不存在时，设$A\left(x_A,y_B\right),B\left(x_A,-y_B\right)$,将其代入双曲线方程$x_A^2-\dfrac{y_A^2}{4}=1$，

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_A^2-y_A^2=0$，解得$y_A=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，此时$|AB|=2\left|y_A\right|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，当直线$l$斜率存在时，设其方程为

$y=kx+m$，设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$,联立$\begin{cases}y=kx+m\\ x^2-\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，$\Rightarrow\left(4-k^2\right)x^2-2kmx-m^2-4=0$



故$\begin{cases}4-k^2\neq 0\\ x_1+x_2=\dfrac{2km}{4-k^2}\\ x_1x_2=\dfrac{-m^2-4}{4-k^2}\\ \Delta=4k^2m^2+4\left(m^2+4\right)\left(4-k^2\right)=16\left(m^2-k^2+4\right)>0\end{cases}$，

则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)$

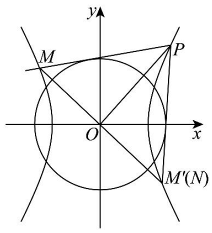
$=\left(1+k^2\right)x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2=\left(1+k^2\right)\dfrac{-m^2-4}{4-k^2}+km\dfrac{2km}{4-k^2}+m^2=0$,

化简得$4k^2+4=3m^2$，此时$\Delta=16\left(\dfrac{k^2+16}{3}\right)>0$，所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{2km}{4-k^2}\right)^2+4\dfrac{m^2+4}{4-k^2}}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{16\left(m^2-k^2+4\right)}{\left(4-k^2\right)^2}}$，又$\because 4k^2+4=3m^2$

$=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{\dfrac{k^4+17k^2+16}{k^4-8k^2+16}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\dfrac{25k^2}{k^4-8k^2+16}}$，

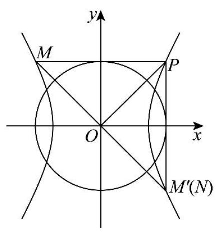
当$k=0$时，此时$|AB|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，当$k\neq 0$时，此时$|AB|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\dfrac{25}{k^2+\dfrac{16}{k^2}-8}}$，



$\because 4-k^2\neq 0,\therefore k^2+\dfrac{16}{k^2}>2\sqrt{k^2\cdot\dfrac{16}{k^2}}=8$，故$\dfrac{25}{k^2+\dfrac{16}{k^2}-8}>0$，

因此$|AB|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\dfrac{25}{k^2+\dfrac{16}{k^2}-8}}>\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，综上可得$|AB|\geq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$．……………………10 分

(3) 解法一：当直线$PM:y=nx+p$与$x^2+y^2=\dfrac{4}{3}$相切时，



圆心到直线的距离$d=\dfrac{|p|}{\sqrt{1+n^2}}=r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 4n^2+4=3p^2$，

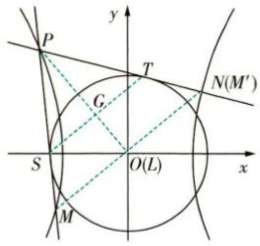
设$P\left(x_3,y_4\right),M\left(x_4,y_4\right)$，类似(2)中的计算可得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=x_3x_4+y_3y_4$

$=x_3x_4+\left(nx_3+p\right)\left(nx_4+p\right)=\left(1+k^2\right)x_3x_4+km\left(x_3+x_4\right)+m^2$

$=\left(1+n^2\right)\dfrac{-p^2-4}{4-n^2}+np\dfrac{2np}{4-n^2}+p^2=\dfrac{3p^2-4n^2-4}{4-n^2}=0$，所以$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OM}$，由双曲线的对称性，延长$MO$交双曲线于另一点$M'$,则$|MO|=|M'O|$，且$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OM'}$，根据轴对称性可得$|MP|=|M'P|$，且直线$PM'$与$x^2+y^2=\dfrac{4}{3}$也相切，即$M'$即为$N$,符合题意当$PM$或$PN$斜率不存在时，$PN:x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$PM:y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，显然满足题意，

故存在这样的圆$x^2+y^2=\dfrac{4}{3}$，半径为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$．……………………………………17 分

事实上，圆 O 是唯一的，理由如下：



设直线 PM 和 PN 分别与圆 O 相切于点 S,T,连接 ST，则 $|PS|=|PT|,OP\perp ST$，

又 $|PM|=|PN|$，所以 $MN/\!/ST$，记 ST，MN 的中点分别为 G，L

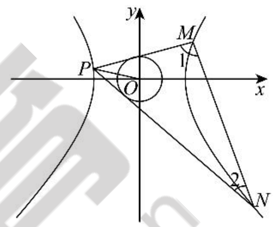
由平面几何知识可知 P,G,L,O 四点共线，$OP\perp MN,OL\perp MN$，

则 $K_{MN}\cdot K_{OL}=-1$，而由点差法得 $K_{MN}\cdot K_{OL}=4$，矛盾，从而说明 L,O 重合，

即 M，O，N 三点一定共线，从而说明这样的圆是唯一存在的.

(备注：唯一性说明不作为评分要求)

解法二：设 $P\left(x_0,y_0\right)$，$x_0^2-\frac{y_0^2}{4}=1$，由于 PM,PN 为圆的切线，PO 平分 $\angle MPN$，且 $PM=PN$,所以 $PO\perp MN$,设过点 P 与圆 O 相切的直线方程为 $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$,（直线斜率存在时）



$\frac{|y_0-kx_0|}{\sqrt{1+k^2}}=r\Rightarrow y_0^2-2kx_0y_0+k^2x_0^2=r^2k^2+r^2$，

$\left(x_0^2-r^2\right)k^2-2kx_0y_0+y_0^2-r^2=0$，将两根记为 k_1,k_2，

$k_1+k_2=\frac{2x_0y_0}{x_0^2-r^2},k_1k_2=\frac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}$

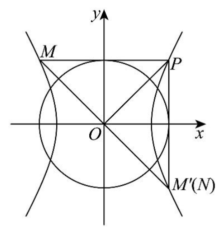
$$\begin{cases}y-y_0=k_1\left(x-x_0\right)\\ x^2-\frac{y^2}{4}=1\end{cases}\Rightarrow\left(4-k_1^2\right)x^2+\left(2k_1^2x_0-2k_1y_0\right)x+2k_1x_0y_0-k_1^2x_0^2-y_0^2-4=0,$$

$x_0x_M=\frac{2k_1x_0y_0-k_1^2x_0^2-y_0^2-4}{4-k_1^2}\Rightarrow x_M=\frac{2k_1y_0-k_1^2x_0-4x_0}{4-k_1^2}$，$y_M=k_1\frac{2k_1y_0-8x_0}{4-k_1^2}+y_0$

同理可得 $x_N=\frac{2k_2y_0-k_2^2x_0-4x_0}{4-k_2^2},y_N=k_2\frac{2k_2y_0-8x_0}{4-k_2^2}+y_0$,

$$\text{故 }k_{MN}=\frac{k_2\frac{2k_2y_0-8x_0}{4-k_2^2}+y_0-\left(k_1\frac{2k_1y_0-8x_0}{4-k_1^2}+y_0\right)}{\frac{2k_2y_0-k_2^2x_0-4x_0}{4-k_2^2}-\frac{2k_1y_0-k_1^2x_0-4x_0}{4-k_1^2}}=\frac{8y_0\left(k_1+k_2\right)\left(k_2-k_1\right)-32x_0\left(k_2-k_1\right)-8x_0k_2k_1\left(k_2-k_1\right)}{8y_0\left(k_2-k_1\right)+2y_0k_2k_1\left(k_2-k_1\right)-8x_0\left(k_1+k_2\right)\left(k_2-k_1\right)}$$

$$=\frac{8y_0\left(k_1+k_2\right)-32x_0-8x_0k_2k_1}{8y_0+2y_0k_2k_1-8x_0\left(k_1+k_2\right)}\quad\therefore K_{MN}\cdot K_{OP}=\frac{8y_0\frac{2x_0y_0}{x_0^2-r^2}-32x_0-8x_0\frac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}}{8y_0+2y_0\frac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}-8x_0\frac{2x_0y_0}{x_0^2-r^2}}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-1$$



$\frac{8y_0^2-32x_0^2+40r^2}{-8x_0^2-10r^2+2y_0^2}=-1$，即 ${y_0}^2-4{x_0}^2+3r^2=0\Rightarrow r^2=\frac{4}{3}\Rightarrow r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故存在这样的圆 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$，半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当 PM 或 PN 斜率不存在时，此时 $PN:x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$PM:y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，显然满足题意，

故存在这样的圆 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$，半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ·························17 分