2025—2026 学年度上期高 2027届期末考试

数学试卷

考试时间：120 分钟　　　满分：150 分

注意事项：

1．本试卷分第 I 卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分．

2．答题前，考生务必先将自己的姓名、考号填写在答题卡上，并使用 2B 铅笔填涂．

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．直线 $x=\cos 30^\circ$ 的倾斜角为（ ）

A．0°　　B．90°　　C．30°　　D．60°

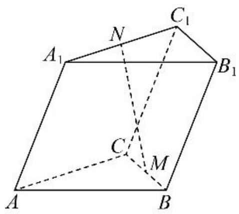
2．抛物线 $y=2x^2$ 的焦点坐标是（　　）

A．$\left(\frac{1}{2},0\right)$　　B．$\left(\frac{1}{8},0\right)$　　C．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D．$\left(0,\frac{1}{8}\right)$

3．已知一组数据为：$1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,5$，则这组数据（　　）

A．中位数为2　　B．众数为2　　C．第70百分位数为3　　D．平均数为3

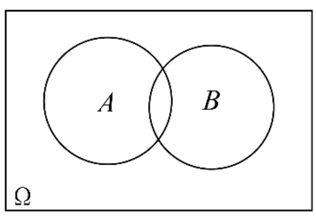
4．如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M 为棱 BC 上靠近 B 的三等分点，N 为 A_1C_1 的中点，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AC}=\vec{b},\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$，则用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{MN}$ 为（　　）



A．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}-\vec{c}$　　B．$-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}+\vec{c}$

C．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\vec{c}$　　D．$-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\vec{c}$

5．已知一个古典概型的样本空间Ω和事件 A，B 如图所示．其中 $n(\Omega)=18,n(A)=9,n(B)=6,n(A\cup B)=12$，则事件 A 与事件 B（　　）



A．是互斥事件，不是独立事件

B．不是互斥事件，是独立事件

C．既是互斥事件，也是独立事件

D．既不是互斥事件，也不是独立事件

6．已知直线 $l:mx+y+m+1=0$ 与圆 $O:x^2+y^2=4$ 相交于 A、B 两点，若 $|AB|$ 为整数，则这样的直线 l 有（　　）条

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

7．吹奏乐器“埙”（如图 1）在古代通常是用陶土烧制的，一种“埙”的外轮廓的上部是半椭圆，下部是半圆，已知半椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$（$y\ge 0,a>b>0$ 且为常数）和半圆 $x^2+y^2=b^2\left(y<0\right)$ 组成的曲线 C 如图 2 所示，曲线 C 交 x 轴的负半轴于点 A，交 y 轴的正半轴于点 G，点 M 是半圆上任意一点，当点 M 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ 时，$\triangle AGM$ 的面积最大，则半椭圆的方程是(　)

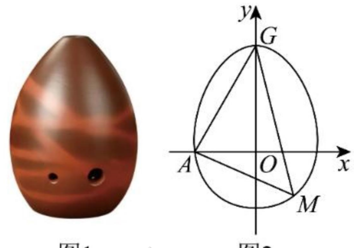
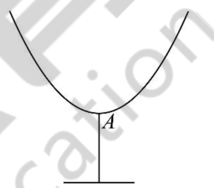


图1　　图2

A. $\frac{y^2}{3}+x^2=1\left(y\ge 0\right)$　　B. $\frac{y^2}{2}+x^2=1\left(y\ge 0\right)$

C. $\frac{4x^2}{3}+\frac{2y^2}{3}=1\left(y\ge 0\right)$　　D. $\frac{2y^2}{3}+x^2=1\left(y\ge 0\right)$

8．如图，已知一酒杯的内壁是由抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 旋转形成的抛物面，当放入一个半径为 2 的玻璃球时，玻璃球可碰到酒杯底部的 A 点，当放入一个半径为 3 的玻璃球时，玻璃球不能碰到酒杯底部的 A 点，则 p 的取值范围为（　　）



A. $\left[2,3\right)$　　B. $\left[4,9\right)$

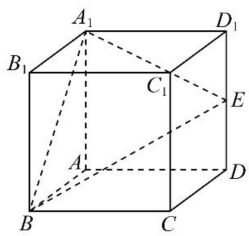
C. $\left[1,3\right)$　　D. $(2,2\sqrt{2})$

二、选择题：本题共 **3** 小题，每小题 **6** 分，共 **18** 分**.**在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求**.**

9．已知 S_n 是数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，$2S_n=3a_n-1$，则下列结论正确的是（　　）

A．数列 $\left\{a_n\right\}$ 是等差数列　　B．数列 $\left\{a_n\right\}$ 是递增数列　　C．$a_n=3^{n-1}$　　D．$S_n=\frac{3^n-1}{2}$

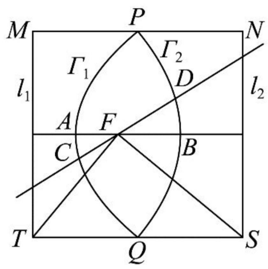
10．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 DD_1 的中点，F 为正方形 C_1CDD_1 内的一个动点（包括边界），且 B_1F // 平面 A_1BE，则下列说法正确的是（　　）



A．点 F 的轨迹长度为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\left|B_1F\right|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

C．三棱锥 $F-A_1BE$ 的体积为定值　　D．三棱锥 B_1-D_1DF 的最大体积为 $\frac{1}{3}$

11．如图抛物线 Γ_1 的顶点为 A，焦点为 F，准线为 l_1，焦准距为 2；抛物线 Γ_2 的顶点为 B，焦点也为 F，准线为 l_2，焦准距为 3．Γ_1 和 Γ_2 交于 P、Q 两点，分别过 P、Q 作直线与两准线垂直，垂足分别为 M、N、S、T，过 F 的直线与封闭曲线 $APBQ$ 交于 C、D 两点，则下列说法正确的是（　　）



A．$\left|AB\right|=\frac{5}{2}$　　B．四边形 $MNST$ 的面积为 25

C．$\overrightarrow{FS}\cdot\overrightarrow{FT}=0$　　D．$\left|CD\right|$ 的取值范围为 $\left[\frac{5}{2},\frac{25}{6}\right]$

第 II 卷（非选择题）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12．已知双曲线方程为：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$，则该双曲线的渐近线方程为____________________.

13．已知点 F_1，F_2 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，点 P 为该椭圆上一点，且满足 $\angle F_1PF_2=\dfrac{2\pi}{3}$，若 $\triangle PF_1F_2$ 的外接圆面积是其内切圆面积的 4 倍，则该椭圆的离心率为__________.

14．三棱锥 $A-BCD$ 满足 $BC+AC=BD+AD=8$，二面角 $C-AB-D$ 的大小为 $\dfrac{2\pi}{3}$，$CD\perp AB$，$AB=4$，$CD=3\sqrt{3}$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为______________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．(共 13 分)已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_2=-22, a_7=0$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

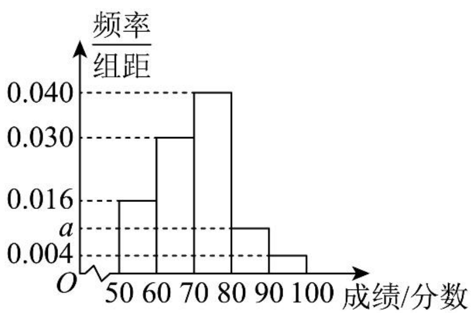
(2)设 $b_n=\dfrac{S_n}{n}$，求数列 $\{|b_n|\}$ 的前 20 项和.

16．(共 15 分) 已知圆 C 过点 $M(-1,2)$ 和点 $N(1,0)$，且圆心 C 在直线 $l_1: 2x-y=0$ 上.

（1）求圆 C 的方程；

（2）已知直线 $l_2: kx+y-k=0$ 与圆 C 相交于 A,B 两点，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

17．(共 15 分)某校举办了校园诗词大赛，学生的比赛成绩均在 $[50,100]$ 内（单位：分），随机抽取了 100 名学生的成绩，整理后按照 $[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]$ 分成五组，并绘制成如图所示的频率分布直方图.

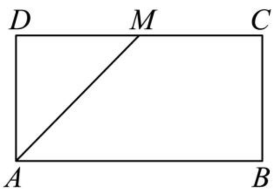


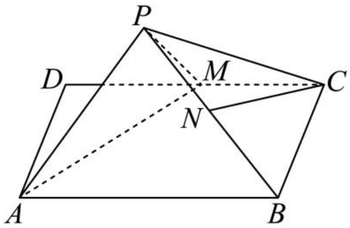
(1)若规定成绩较高的前10% 的学生获奖，请求出 a 的值并估计获奖学生的最低分数线；

(2)现从样本成绩在 $[70,80)$ 与 $[80,90)$ 两个分数段内，按分层随机抽样的方法选取 5 人，再从这 5 人中随机选取 2 人，求这 2 人中恰有 1 人的成绩落在 $[70,80)$ 内的概率；

(3)已知样本数据落在 $[70,80)$ 的平均数是 77，方差是 9，落在 $[80,90)$ 的平均数是 82，方差是 4，求这两组数据合并后的平均数 $\bar{x}$ 和总方差 s^2.

18．(共 17 分)如图①所示，矩形 $ABCD$ 中，$AD=\sqrt{2},AB=2\sqrt{2}$，点 M 是边 CD 的中点，将 $\triangle ADM$ 沿 AM 翻折到 $\triangle PAM$，连接 PB，PC，得到图②的四棱锥 $P-ABCM$，N 为 PB 中点．


图①


图②

(1)求证：$NC//$ 平面 PAM；

(2)若平面 $PAM\perp$ 平面 $ABCD$，求直线 BC 与平面 PMB 所成角的大小；

(3)设二面角 $P-AM-D$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$，求平面 PAM 和平面 PBC 夹角的余弦值．

19. (共 17 分)已知 O 为坐标原点，双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的实轴长为 2，且经过点 $(2,2\sqrt{3})$．

（1）求 C 的方程；

（2）若直线 l 与 C 交于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，求 $|AB|$ 的取值范围；

（3）已知点 P 是 C 上的动点，是否存在定圆 $O:x^2+y^2=r^2(r>0)$，使得当过点 P 能作圆 O 的两条切线 PM，PN 时（其中 M，N 分别是两切线与 C 的另一交点），总满足 $|PM|=|PN|$？若存在，求出圆 O 的半径 r，若不存在，请说明理由．