2026届高三一轮复习第一次调研考试

数学参考答案及评分意见

1.A 【解析】由$\frac{z+3i}{z}=-i$得$z=-\frac{3i}{1+i}=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$.故选A.

2.D 【解析】因为$A=\{-6,6\}$，$A\cup B=A$，所以$B\subseteq A$.当$B=\varnothing$时，$a=0$，符合题意；当$B\neq\varnothing$时，$a\neq0$，$B=\{x\mid ax-3=0\}=\left\{x\middle|x=\frac{3}{a}\right\}$，则$\frac{3}{a}=-6$或$\frac{3}{a}=6$，解得$a=-\frac{1}{2}$或$a=\frac{1}{2}$.综上，实数$a$的取值构成的集合为$\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$.故选D.

3.C 【解析】∵函数$f(x)=a+\frac{4}{3^x-1}$，∴$3^x-1\neq0$，解得$x\neq0$，∴函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.若$f(x)$为奇函数，则$f(-x)=-f(x)$，即$a+\frac{4}{3^{-x}-1}=-a-\frac{4}{3^x-1}$，∴$2a=-\frac{4\times3^x}{1-3^x}-\frac{4}{3^x-1}=4$，解得$a=2$.故选C.

4.B 【解析】$\exists x\in\{x\mid-3\leqslant x\leqslant3\}$，使得$x-4a-13<0$成立，即$4a+13>x$成立，又$x$的最小值为$-3$，所以$4a+13>-3$，解得$a>-4$，即实数$a$的取值范围是$(-4,+\infty)$，故选B.

5.C 【解析】令$2\,000\cos\left(\frac{k\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+2\,500\geqslant3\,500$，整理得$\cos\left(\frac{k\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\geqslant\frac{1}{2}$，即$\sin\left(\frac{k\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-\frac{1}{2}$，所以$2n\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant\frac{k\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\leqslant2n\pi-\frac{\pi}{6}$，$n\in\mathbf{Z}$，解得$12n-6\leqslant k\leqslant12n-2$，$n\in\mathbf{Z}$.因为$1\leqslant k\leqslant12$，所以$n=1$，$6\leqslant k\leqslant10$.因为$k$是正整数，所以$k=6,7,8,9,10$，所以一年中是“旺季”的月份有5个.故选C.

6.A 【解析】∵$x>y>0$，∴$2x-y>0$，$x+y>0$，∴$3x+\frac{1}{2x-y}+\frac{1}{x+y}=\left[(2x-y)+\frac{1}{2x-y}\right]+\left[(x+y)+\frac{1}{x+y}\right]\geqslant2\sqrt{(2x-y)\cdot\frac{1}{2x-y}}+2\sqrt{(x+y)\cdot\frac{1}{x+y}}=2+2=4$，当且仅当$2x-y=\frac{1}{2x-y}$，$x+y=\frac{1}{x+y}$，即$x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{1}{3}$时取等号，∴$3x+\frac{1}{2x-y}+\frac{1}{x+y}$的最小值为4.故选A.

7.B 【解析】∵$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|$，∴$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$为函数$f(x)$的最大值或最小值.∵$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$，∴$\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.解得$\omega=4k+1$，$k\in\mathbf{Z}$.又函数$f(x)$的最小正周期$T$满足$T\in\left(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{3}\right)$，且$\omega>0$，∴$\frac{\pi}{5}<\frac{2\pi}{\omega}<\frac{\pi}{3}$，解得$6<\omega<10$，∴当$k=2$时，$\omega=9$满足，∴$T=\frac{2\pi}{9}$.故选B.

8.A 【解析】∵不等式$ae^x\leqslant\sin x$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上恒成立，∴$a\leqslant\frac{\sin x}{e^x}$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上恒成立.

设$f(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$，则$f'(x)=\frac{\cos x\cdot e^x-e^x\sin x}{(e^x)^2}=-\frac{\sin x-\cos x}{e^x}=-\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{e^x}=\frac{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$.当$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$时，$x-\frac{\pi}{4}\in\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$，∴$-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant0$，当且仅当$x=\frac{\pi}{4}$时，等号成立，∴$f'(x)\leqslant0$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上恒成立，∴函数$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递减，∴$f(x)_{\min}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{e^{\frac{\pi}{3}}}=$

$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{e^{\frac{\pi}{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$，$\therefore a\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}$，即实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{3}}\right]$.故选 A.

9.BD 【解析】$\because f(x)=-x^3e^{ax+b}+x$，$\therefore f'(x)=-(3x^2+ax^3)e^{ax+b}+1$.$\because$函数 $f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=-x+1$，$\therefore f(1)=-1+1=0$，$f'(1)=-1$，即$\begin{cases}f(1)=-e^{a+b}+1=0,\\f'(1)=-(3+a)e^{a+b}+1=-1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=1,\end{cases}$故 A 错误，B 正确.$\because a=-1$，$b=1$，$\therefore f'(x)=-(3x^2-x^3)e^{1-x}+1$.设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=(3x^2-x^3)\cdot e^{1-x}-(6x-3x^2)e^{1-x}=-x(x^2-6x+6)e^{1-x}$.$\because x>0$，$\therefore$令 $g'(x)=0$，得 $x^2-6x+6=0$，解得 $x_1=3-\sqrt{3}$，$x_2=3+\sqrt{3}$.$\because x>0$，$\therefore -x<0$，令 $g'(x)<0$，得 $x^2-6x+6>0$，解得 $0<x<3-\sqrt{3}$ 或 $x>3+\sqrt{3}$；令 $g'(x)>0$，得 $x^2-6x+6<0$，解得 $3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$，$\therefore$函数 $y=f'(x)$的单调递减区间为$(0,3-\sqrt{3})$，$(3+\sqrt{3},+\infty)$，单调递增区间$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$，故 C 错误，D 正确.故选 BD.

10.ACD 【解析】对于 A，$\because$函数 $f(x)$满足 $f(3+x)=f(3-x)$，$\therefore$函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=3$ 对称.

$\because \dfrac{-2+8}{2}=3$，$\therefore f(-2)=f(8)$，故 A 正确.

对于 B，当 $x\in[-3,0)$时，$-x\in(0,3]$.$\because$当 $x\in(0,3]$时，$f(x)=12x-3x^2$，$\therefore f(-x)=-12x-3x^2$.又$\because$函数 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，$\therefore$当 $x\in[-3,0)$时，$f(x)=-f(-x)=12x+3x^2$，故 B 错误.

对于 C，$\because$函数 $f(x)$满足 $f(3+x)=f(3-x)$，$\therefore f(6-x)=f(x)$.当 $x\in(6,9)$时，$6-x\in(-3,0)$，$\because$当 $x\in[-3,0)$时，$f(x)=12x+3x^2$，$\therefore f(6-x)=12(6-x)+3(6-x)^2=3x^2-48x+180$，$\therefore$当 $x\in(6,9)$时，$f(x)=f(6-x)=3x^2-48x+180$.由二次函数的性质可知，$f(x)$在$(6,8)$上单调递减，在$(8,9)$上单调递增，$\therefore x=8$ 是 $f(x)$的极小值点，$\therefore f'(8)=0$，故 C 正确.

对于 D，$\because 3<\log_3 35<4$，$\therefore 2<6-\log_3 35<3$，由 C 的分析得 $f(\log_3 35)=f(6-\log_3 35)$.$\because$当 $x\in(0,3]$时，$f(x)=12x-3x^2$，$\therefore$由二次函数的性质得 $f(6-\log_3 35)>f(3)=9$，$\therefore f(\log_3 35)>9>0$.$\because \pi<4<\dfrac{3\pi}{2}$，$\therefore -1<\cos 4<0$.又$\because$当 $x\in[-3,0)$时，$f(x)=12x+3x^2$，$\therefore f(\cos 4)<0$.$\therefore f(\log_3 35)>f(\cos 4)$，故 D 正确.故选 ACD.

11.BCD 【解析】$f(x)=-2\sqrt{3}\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos(\pi-2x)+\sqrt{3}=-2\sqrt{3}\times\dfrac{1-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}+\cos 2x+\sqrt{3}=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

对于 A，$\because x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，$\therefore \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$，$\therefore 2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\in[-1,2]$，故 A 错误.

对于 B，$\because$函数 $f(x)$的取值范围为$[-1,2]$，$\therefore -\dfrac{1}{2}\leqslant\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，$\therefore -\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.当 $b-a$ 最大时，$a=k\pi-\dfrac{\pi}{6}$，$b=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore b-a$ 的最大值是$\dfrac{2\pi}{3}$，故 B 正确.

对于 C，$\because \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(\alpha)=\sqrt{3}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=\dfrac{2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-2\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1=$

$\dfrac{2\sqrt{3}\tan\alpha-2\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1=\dfrac{13}{7}$,故 C 正确.

对于 D,$\because f(\alpha)=\dfrac{6}{5}$,$\therefore \sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{5}$.$\because \dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{12}$,$\therefore 2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,$\therefore \cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{4}{5}$,

$\therefore \cos 2\alpha=\cos\left[\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\pi}{6}\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3-4\sqrt{3}}{10}$,故 D 正确.故选 BCD.

12.6 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $|z|=2$ 的几何意义是点 (a,b) 在以原点为圆心,以 2 为半径的圆上. $|z+\sqrt{7}-3i|=\sqrt{(a+\sqrt{7})^2+(b-3)^2}$ 的几何意义是点 (a,b) 到点 $(-\sqrt{7},3)$ 的距离.根据圆的性质可知,所求最大值为 $\sqrt{(0+\sqrt{7})^2+(0-3)^2}+2=4+2=6$.

13.$-\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$ 【解析】$\because \sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=2\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{4}{5}$,$\therefore \sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2}{5}$.$\because 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore -\dfrac{\pi}{6}<2\alpha-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$.$\because \sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2}{5}<0$,$\therefore -\dfrac{\pi}{6}<2\alpha-\dfrac{\pi}{6}<0$,$\therefore \cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

$\therefore \tan\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{2\sqrt{21}}{21}$.

14.$(-\infty,2\sqrt{10})$ 【解析】设 $t=2^x-2^{-x}$,$\because$ 函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,函数 $y=2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,$\therefore t=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$\therefore$ 当 $x>1$ 时,$t>2-2^{-1}=\dfrac{3}{2}$.$\therefore f(x)<0$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立等价于 $a<\dfrac{4^x+4^{-x}+8}{2^x-2^{-x}}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恒成立.$\because \dfrac{4^x+4^{-x}+8}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{(2^x-2^{-x})^2+10}{2^x-2^{-x}}=2^x-2^{-x}+\dfrac{10}{2^x-2^{-x}}=t+\dfrac{10}{t}\geqslant 2\sqrt{10}$,当且仅当 $t=\sqrt{10}>\dfrac{3}{2}$ 时,等号成立,$\therefore a<2\sqrt{10}$,即实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2\sqrt{10})$.

15.解:(1)$\because$“$x\in C$”是“$x\in A$”的充分条件,$\therefore C\subseteq A$. ………… 2 分

$\because A=\{-1,4\}$,$C=\{x|bx=1\}=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{b}\right\}$,

$\therefore$ 当 $C=\{-1\}$ 时,$x=\dfrac{1}{b}=-1$,解得 $b=-1$; ………… 4 分

当 $C=\{4\}$ 时,$x=\dfrac{1}{b}=4$,解得 $b=\dfrac{1}{4}$.

综上,实数 b 的取值构成的集合为 $\left\{-1,\dfrac{1}{4}\right\}$. ………… 6 分

(2)$\because$ 命题 p:“$\forall x\in B$,都有 $x\in A$”为真命题,$\therefore B\subseteq A$. ………… 8 分

$\because A=\{-1,4\}$,$B=\{x|[x-(a-2)](x+1)=0\}$,

$\therefore$ 若 $B=\{-1\}$,则 $a-2=-1$,解得 $a=1$; ………… 10 分

若 $B=\{-1,4\}$,则 $a-2=4$,解得 $a=6$. ………… 12 分

综上,实数 a 的取值构成的集合为 $\{1,6\}$. ………… 13 分

16.解:(1)$\because$ 函数 $f(x)$ 相邻两个零点间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$,$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.

$\because \omega>0$,$\therefore \omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$,$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$. ………… 3 分

$\therefore f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$,

又 $\because f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数，$\therefore \varphi+\frac{\pi}{3}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$.

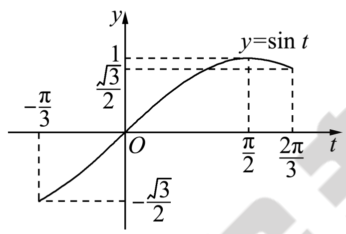
$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \therefore \varphi=-\frac{\pi}{3}$, ………………………………………… 6 分

$\therefore f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. ………………………………………… 7 分

(2)由(1)得 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

设 $t=2x-\frac{\pi}{3}$，$\because 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 9 分

函数 $y=\sin t$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上的大致图象如图所示. ………………………………………… 11 分



函数 $y=f(x)+a(a\in\mathbf{R})$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上有两个零点 x_1, x_2,

即函数 $y=\sin t$ 的图象与直线 $y=-a$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$ 内有两个交点，且两交点的横坐标分别为 t_1, t_2.

………………………………………… 12 分

由图可得 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant -a<1$，$t_1+t_2=2x_1-\frac{\pi}{3}+2x_2-\frac{\pi}{3}=\pi$，整理得 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$,

$\therefore f(x_1+x_2)=\sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………………… 15 分

17.(1)**解**：当 $k=1$ 时，$g(x)=e^{2x}+\frac{x^2}{2}-(x+1)e^x$,

则 $g'(x)=2e^{2x}-(x+2)e^x+x=(e^x-1)(2e^x-x)$. ………………………………………… 3 分

$\because x>0$，$\therefore e^x-1>0$.

设 $T(x)=2e^x-x$，则 $T'(x)=2e^x-1>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$T(x)>T(0)=2>0$,

$\therefore g'(x)>0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立. ………………………………………… 5 分

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，不存在单调递减区间. ………………………………………… 7 分

(2)**证明**：由题意得 $f(x)\geqslant 1+\ln 2x$，即 $ke^{2x}\geqslant 1+\ln 2x$.

$\because k\geqslant\frac{1}{e}$，$\therefore ke^{2x}\geqslant\frac{e^{2x}}{e}$，$\therefore$ 可考虑证明：$\frac{e^{2x}}{e}\geqslant 1+\ln 2x$. ………………………………………… 9 分

设 $t=2x(t>0)$，则不等式 $\frac{e^{2x}}{e}\geqslant 1+\ln 2x$，即 $\frac{e^t}{e}\geqslant 1+\ln t(t>0)$. ………………………………………… 10 分

令 $h(t)=\frac{e^t}{e}-1-\ln t, t>0$，则 $h'(t)=\frac{e^t}{e}-\frac{1}{t}$.

∵函数 $h'(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $h'(1)=0$，

∴当 $0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减；当 $t>1$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增，

∴$t=1$ 是 $h(t)$ 的极小值点，也是最小值点. …………………………………………………… 13 分

∴$h(t)\geqslant h(1)=0$，∴$\frac{e^t}{e}\geqslant 1+\ln t$，即 $\frac{e^{2x}}{e}\geqslant 1+\ln 2x$，

∴当 $k\geqslant\frac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 1+\ln 2x$. ………………………………………………………… 15 分

18.**解**：(1)假设存在实数 $a,b(a<b)$，使得 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的取值范围为 $[a,b]$.

∵函数 $f(x)=\sqrt{x-3}$ 的定义域为 $[3,+\infty)$，且函数 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

∴$f(a)=a$，$f(b)=b$，即方程 $f(x)=x$ 在 $[3,+\infty)$ 上有两个不相等的实数根. ……………… 4 分

方程 $\sqrt{x-3}=x$，整理得 $x^2-x+3=0$.

∵$\Delta=1-4\times3=-11<0$，∴方程 $x^2-x+3=0$ 无实数根. ……………………………………… 6 分

∴假设不成立，即不存在实数 $a,b(a<b)$，使得 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的取值范围为 $[a,b]$. ………… 8 分

(2)设函数 $g(x)=f(x)+x$.

∵函数 $f(x)$，$y=x$ 在区间 $[3,+\infty)$ 上都单调递增，

∴函数 $g(x)$ 在区间 $[3,+\infty)$ 上单调递增. ……………………………………………………… 11 分

又∵$f(4)=\sqrt{4-3}=1$，

∴$f(x^2-10x+28)<-x^2+10x-23$ 等价于 $f(x^2-10x+28)+(x^2-10x+28)<f(4)+4$，即 $g(x^2-10x+28)<g(4)$. ………………………………………………………………………………… 14 分

∴$x^2-10x+28<4$，即 $x^2-10x+24<0$，解得 $4<x<6$，

故不等式 $f(x^2-10x+28)<-x^2+10x-23$ 的解集为 $\{x|4<x<6\}$. ………………………… 17 分

19.**解**：(1)∵$f(x)=x^2-\ln x+\frac{3}{4}$，∴$f'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$. ……………………………… 1 分

当 $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$f'(x)>0$，

∴$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………… 3 分

∴当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值也是最小值.

故函数 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5}{4}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. ……………………………… 5 分

(2)由题意，得 $g(x)=x^2+\frac{3}{4}$，$x>0$，$h(x)=\ln x$.

∵直线 $y=-2x+b$ 与曲线 $y=g(x)$，$y=h(x)$ 分别交于 P，Q 两点，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $\begin{cases}x_1^2+\frac{3}{4}=-2x_1+b,\\ \ln x_2=-2x_2+b,\end{cases}$

两式相减，得 $x_1^2+\frac{3}{4}-\ln x_2=2(x_2-x_1)$. ……………………………………………… 8 分

设 $x_2-x_1=t$，则 $x_1^2-\ln(x_1+t)-2t+\frac{3}{4}=0$.

设 $T(x)=x^2-\ln(x+t)-2t+\frac{3}{4}$，则 $T(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点. ………… 9 分

$T'(x)=2x-\frac{1}{x+t}=\frac{2x^2+2tx-1}{x+t}$，

$\because \Delta=4t^2+8>0$，$\therefore 2x^2+2tx-1=0$ 有两个不相等的实数根，且两根之积为 $-\frac{1}{2}$，

$\therefore 2x^2+2tx-1=0$ 必有一正实数根，设其为 x_0，

则在区间 $(0,x_0)$ 上，$T'(x)<0$，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上，$T'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $T(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，其中 $2x_0^2+2tx_0-1=0$，即 $t=\frac{1}{2x_0}-x_0$.

$\therefore$ 函数 $T(x)$ 在 x_0 处取得极小值也是最小值.

$\because$ 函数 $T(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点，$\therefore T(x_0)\leqslant 0$，即 $x_0^2+\ln(2x_0)-\frac{1}{x_0}+2x_0+\frac{3}{4}\leqslant 0$. ………… 11 分

设 $M(x)=x^2+\ln(2x)-\frac{1}{x}+2x+\frac{3}{4}$，则 $M'(x)=2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+2>0$，

$\therefore M(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because M\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore 0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore t=\frac{1}{2x_0}-x_0\geqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore |PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{5}\sqrt{(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5}|x_2-x_1|=\sqrt{5}t\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$. ………… 13 分

$\therefore$ 当 $|PQ|$ 取最小值时，$x_2-x_1=t=\frac{1}{2}$，$\therefore x_1^2-\ln\left(x_1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=0$. ………… 14 分

设 $\varphi(x)=x^2-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}$，则 $\varphi'(x)=2x-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}=\frac{(x+1)(2x-1)}{x+\frac{1}{2}}$，

在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上，$\varphi'(x)<0$，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore$ 函数 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

$\therefore \varphi(x)$ 的最小值为 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=0$. ………… 16 分

$\therefore x_1=\frac{1}{2}$，$\therefore b=x_1^2+2x_1+\frac{3}{4}=2$. ………… 17 分